高中数学结构不良试题探微

莆田第二中学　　蔡海涛

本文系2019年度福建省基础教育课程教学研究课题《核心素养导向下高中数学阅读教学模式的研究》（课题编号:MJYKT2019-106)的研究成果.

一、问题提出

2019年，教育部明确提出要立足全面发展育人目标，构建包括“核心价值、学科素养、关键能力、必备知识”在内的高考考查内容体系.高考评价体系通过解决“为什么考、考什么、怎么考”的问题，从高考层面对“培养什么人、怎样培养人、为谁培养人”这一教育根本问题给出了回答[1].新时期高考内容改革的重要特征就是从能力立意到素养导向的转变，素养导向的题目特点是不追求题目结构完整，更清晰、准确地考查学生的智力水平、思考深度、思维习惯和科学态度[2]，这类试题称为结构不良试题.

结构不良试题是指它没有明确的结构、要求或解决的途径.这类问题的主要特征有:问题条件或数据部分缺失或冗余；问题目标界定不明确；具有多种评价解决方法的标准等[3].本文基于这些特征探析结构不良试题.

二、问题条件或数据部分缺失

例1 已知$\triangle ABC$中，三个内角A，B，C所对的边分别是a，b，c.

（1）证明：$a\cos B+b\cos A=c$；

（2）在①$\dfrac{2c-b}{\cos B}=\dfrac{a}{\cos A}$，②$c\cos A=2b\cos A-a\cos C$，③$2a-\dfrac{b\cos C}{\cos A}=\dfrac{c\cos B}{\cos A}$这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解答.

若$a=7$，$b=5$，________，求$\triangle ABC$的周长.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

剖析 （1）略.（2）本题选择哪个条件的关键是考虑能否直接利用第一步的结论.

选①，有$2c\cos A=b\cos A+a\cos B$，式子右边与（1）相同，可得$2c\cos A=c$，得$A=\dfrac{\pi}{3}$.

选②，有$2b\cos A=a\cos C+c\cos A$，同（1）证明过程得$a\cos C+c\cos A=b$，所以$2b\cos A=b$，得$A=\dfrac{\pi}{3}$.

选③，有$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$，同选②方法得$A=\dfrac{\pi}{3}$.

本题选择三个不同条件，殊途同归，均求得$A=\dfrac{\pi}{3}$，选①求解会更直接.

求得角A后，在$\triangle ABC$中，由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=25+c^2-5c=49$，

解得$c=8$，所以$a+b+c=20$，即$\triangle ABC$的周长为20.

例 2 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$\{b_n\}$是各项均为正数的等比数列，

$a_1=b_4$，____，$b_2=8$，$b_1-3b_3=4$，是否存在正整数k，使得数列$\{\dfrac{1}{S_n}\}$的前k项和$T_k>\dfrac{15}{16}$，若存在，求出k的最小值；若不存在，说明理由.

从①$S_4=20$，②$S_3=2a_3$，③$3a_3-a_4=b_2$这三个条件中任选一个，补充到上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

剖析 设等比数列$\{b_n\}$的公比为q（$q>0$），则$b_1=\dfrac{8}{q}$，$b_3=8q$，

于是$\dfrac{8}{q}-3\times 8q=4$，即$6q^2+q-2=0$，解得$q=\dfrac{1}{2}$，$q=-\dfrac{2}{3}$（舍去）.

若选①：则$a_1=b_4=2$，$S_4=4a_1+\dfrac{4\times 3}{2}d=20$，解得$d=2$，

所以$S_n=2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+n$，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

于是$T_k=\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_k}=(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1})=1-\dfrac{1}{k+1}$

令$1-\dfrac{1}{k+1}>\dfrac{15}{16}$，解得$k>15$，因为$k$为正整数，所以$k$的最小值为$16$.

若选②：则$a_1=b_4=2$，$3a_1+\dfrac{3\times 2}{2}d=2(a_1+2d)$，解得$a_1=d=2$. 下同①.

若选③：则$a_1=b_4=2$，$3(a_1+2d)-(a_1+3d)=8$，解得$d=\dfrac{4}{3}$.

于是$S_n=2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{2}{3}n^2+\dfrac{4}{3}n$，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{3}{4}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$，

于是$T_k=\dfrac{3}{4}[(1-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4})+\cdots+(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k+1})+(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2})]$

$=\dfrac{3}{4}(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2})=\dfrac{9}{8}-\dfrac{3}{4}(\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2})$，令$T_k>\dfrac{15}{16}$，

得$\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}<\dfrac{1}{4}$，注意到$k$为正整数，解得$k\geq 7$，所以$k$的最小值为$7$．

三个不同的选择条件，均是先求解$\{a_n\}$的基本量a_1和d，再求得S_n，进而$\{\dfrac{1}{S_n}\}$的前k项和T_k，再解不等式$T_k>\dfrac{15}{16}$，求得k的最小值.

三、问题条件或数据冗余

例3 如图1，已知等边$\triangle ABC$的边长为3，点M，N分别是边AB，AC上的点，且$BM=2MA$，$AN=2NC$．如图2，将$\triangle AMN$沿MN折起到$\triangle A'MN$的位置.

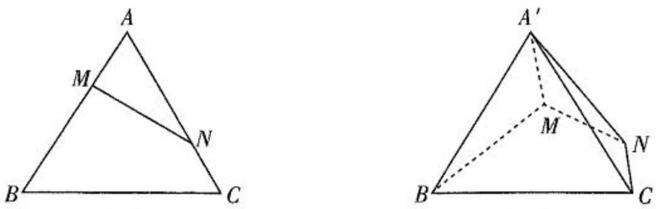


图1　　图2

（1）求证：平面$A'BM\perp$平面$BCNM$；

（2）给出三个条件：①$A'M\perp BC$；②二面角$A'-MN-C$大小为60°；③$A'B=\sqrt{7}$．在这三个条件中任选一个，补充在下面问题的条件中，并作答：

在线段BC上是否存在一点P，使直线PA'与平面$A'BM$所成角的正弦值为$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，若存在，求出PB的长；若不存在，请说明理由.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

剖析　（1）略.（2）若选①：$A'M\perp BC$，由（1）得$A'M\perp MN$，BC和MN相交，所以$A'M\perp$平面$BCNM$．以M为原点，MB，MN，MA'分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系，则$A'(0,0,1)$，设$P(2-a,\sqrt{3}a,0)$，其中$0<a\leqslant\dfrac{3}{2}$，则$\overrightarrow{A'P}=(2-a,\sqrt{3}a,-1)$.

平面$A'BM$的法向量为$\boldsymbol{n}=(0,1,0)$，设直线PA'与平面$A'BM$所成角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{A'P},\boldsymbol{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{(2-a)^2+3a^2+1}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，解得$a=\dfrac{6\pm\sqrt{6}}{2}>\dfrac{3}{2}$，

故不存在P满足条件.

若选②：同（1）得$\angle A'MB$为二面角$A'-MN-C$的平面角，所以$\angle A'MB=60^\circ$.
过A'作$A'O\perp BM$，垂足为O，则$A'O\perp BCNM$.在平面$BCNM$中，作$OD\perp OB$，点D在BM的右侧.以O为原点，OB，OD，OA'分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系，

则$A'\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，设$P\left(\dfrac{3}{2}-a,\sqrt{3}a,0\right)$，其中$0<a\leqslant\dfrac{3}{2}$，则$\overrightarrow{A'P}=\left(\dfrac{3}{2}-a,\sqrt{3}a,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

平面$A'BM$的法向量为$\boldsymbol{n}=(0,1,0)$，设直线PA'与平面$A'BM$所成角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{A'P},\boldsymbol{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}-a\right)^2+3a^2+\dfrac{3}{4}}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，解得$a=\dfrac{3}{2}$，

所以存在P满足条件，这时$PB=3$.

若选③ 在$\triangle A'BM$中，由余弦定理得$\angle A'MB=120^\circ$.过A'作$A'O\perp BM$，垂足为O，则$A'O\perp BCNM$.同选②方法，以O为原点，OB，OD，OA'分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系.

则$A'\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，设$P\left(\dfrac{5}{2}-a,\sqrt{3}a,0\right)$，其中$0<a\leqslant\dfrac{3}{2}$，则$\overrightarrow{A'P}=\left(\dfrac{5}{2}-a,\sqrt{3}a,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

平面$A'BM$的法向量为$\boldsymbol{n}=(0,1,0)$，设直线PA'与平面$A'BM$所成角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{A'P},\boldsymbol{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}-a\right)^2+3a^2+\dfrac{3}{4}}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，解得$a=\dfrac{15\pm\sqrt{57}}{4}>\dfrac{3}{2}$，

所以不存在P满足条件.

选择不同的条件，平面$BCNM$的垂线不同，得到不同的建系途径，均可求得线面角的值，但需结合a的范围进行验证，判断是否存在P满足条件.

四、问题目标界定不明确

例4 已知抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，抛物线的准线交x轴于C，抛物线上互异的三点A，B，D(其中D在第一象限)，$|DF|=4$，$|CD|=4\sqrt{2}$.

（1）求p的值；（2）已知O为坐标原点，李同学从条件①$k_{OA}+k_{OB}=-2$出发，而刘同学从条件②$k_{AD}k_{BD}=a$出发，若要使得两位同学探索得到相同的结果“直线AB过同一个定点”，试问如何设计实数a的值.

剖析(1)$p=4$.(过程略)(2)$D(2,4)$,依题意可设直线$AB:\lambda y=x+m$，$A\left(\dfrac{y_1^2}{8},y_1\right)$，$B\left(\dfrac{y_2^2}{8},y_2\right)$ $\begin{cases}\lambda y=x+m\\ y^2=8x\end{cases}\Rightarrow y^2-8\lambda y+8m=0$，$y_1+y_2=8\lambda$，$y_1y_2=8m$.

李同学 $k_{OA}+k_{OB}=\frac{8}{y_1}+\frac{8}{y_2}=\frac{8\left(y_1+y_2\right)}{y_1y_2}=\frac{8\lambda}{m}=-2\Rightarrow m=-4\lambda$，

即直线 $AB:\lambda y=x-4\lambda$，直线过定点 $\left(0,-4\right)$；

刘同学 $k_{AD}k_{BD}=\dfrac{y_1y_2+16-4\left(y_1+y_2\right)}{\frac{\left(y_1y_2\right)^2}{64}+4-\frac{1}{4}\left[\left(y_1+y_2\right)^2-2y_1y_2\right]}=\dfrac{8}{\left(m+2+4\lambda\right)}$，

代入 $m=-4\lambda$ 可得 $k_{AD}k_{BD}=4$. 故 a 的值为 4.

本题的问题基于直线 AB 过同一个定点，定点究竟是哪个点不明确，需从李同学的条件入手，得到直线过定点 $\left(0,-4\right)$，再结合刘同学的条件，求得 a 的值.

例 5 设 $f\left(x\right)$ 是在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的可导函数，且 $f'\left(x\right)\geqslant\frac{2}{x}f\left(x\right)$，$f\left(1\right)=4$，$f\left(2\right)=16$，则下列一定不成立的是

A. $f\left(\frac{3}{2}\right)=8$　　B. $f\left(3\right)=40$　　C. $f\left(4\right)=72$　　D. $f\left(5\right)=120$

剖析 设 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$，则 $g'(x)=\frac{f'(x)x^2-f(x)2x}{x^4}=\frac{x(xf'(x)-2f(x))}{x^4}\geqslant 0$，

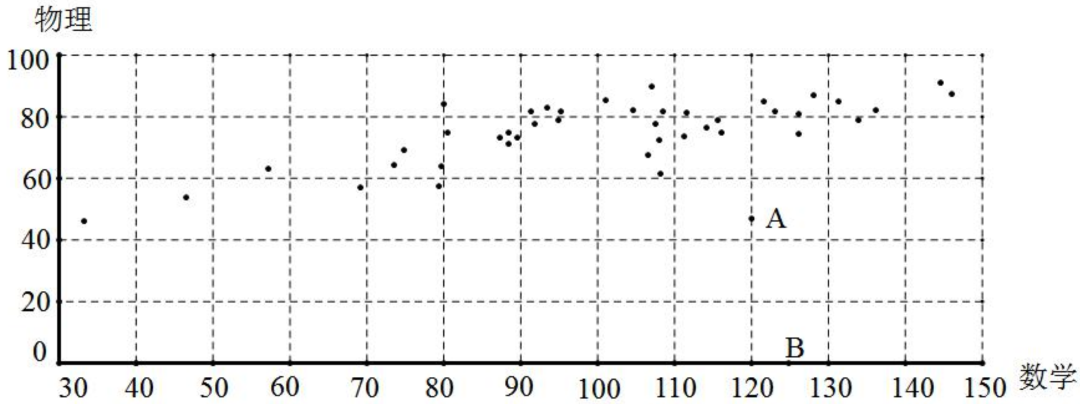
则 $g(x)$ 为单调递增函数或常数函数，而 $g(1)=\frac{f(1)}{1^2}=4$，$g(2)=\frac{f(2)}{2^2}=4$，所以 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是常数函数，则 $g(\frac{3}{2})=4=\dfrac{f(\frac{3}{2})}{\frac{9}{4}}$，即 $f(\frac{3}{2})=9$

而 $g(3)\geqslant 4\Rightarrow f(3)\geqslant 36, g(4)\geqslant 4\Rightarrow f(4)\geqslant 64, g(5)\geqslant 4\Rightarrow f(5)\geqslant 100$. 故选 A .

$g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是常数函数，而当 $x>2$ 时，$g(x)$ 为单调递增函数或常数函数均有可能，故利用 $f\left(x\right)$ 函数值的范围进行判断.

五、问题具有多种评价解决方法的标准

例 6（2020 年福州市高三质检·理 20(1)）某地区在一次考试后，从全体考生中随机抽取 44 名，获取他们本次考试的数学成绩（x）和物理成绩（y），绘制成如下散点图:



根据散点图可以看出y与x之间有线性相关关系，但图中有两个异常点A，B．经调查得知，A考生由于重感冒导致物理考试发挥失常，B考生因故未能参加物理考试．为了使分析结果更科学准确，剔除这两组数据后，对剩下的数据作处理，得到一些统计量的值：$\sum_{i=1}^{42}x_i=4641$，$\sum_{i=1}^{42}y_i=3108$，$\sum_{i=1}^{42}x_iy_i=350350$，$\sum_{i=1}^{42}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=13814.5$，$\sum_{i=1}^{42}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=5250$，其中$x_i$，$y_i$分别表示这42名同学的数学成绩、物理成绩，$i=1$，2，…，42，$y$与$x$的相关系数$r=0.82$．

（1）若不剔除A，B两名考生的数据，用44组数据作回归分析，设此时y与x的相关系数为r_0，试判断r_0与r的大小关系，并说明理由；

解：（1）$r_0<r$．

理由如下：由图可知，y与x成正相关关系，

①异常点A，B会降低变量之间的线性相关程度．

②44个数据点与回归直线的总偏差更大，回归效果更差，所以相关系数更小．

③42个数据点与回归直线的总偏差更小，回归效果更好，所以相关系数更大．

④42个数据点更贴近其回归直线l．

⑤44个数据点与其回归直线更离散．

(以上理由写出任一个或其它言之有理，均可得分）

概率统计的应用题注重解决生活问题，题目可能设计成开放性问题，答案不唯一，只要学生结合概率统计知识把问题说明白就可以得分．

六、结语

数学教育家波利亚曾说过：问题是数学的心脏. 问题可分为结构良好问题和结构不良问题，结构不良问题往往考查学生的知识迁移能力及思维的转化能力，考查学生的数学素养. 基于此，结构不良结构问题往往被命题者所青睐，这需要引起一线教师的关注，在平时的教学中，教师可渗透一些结构不良的问题，采用开放式、互动式的教学方式，引导学生关注数学问题情境的变化，思考如何把结构不良转化为结构良好，通过多位学生的解法展示，区分转化方法的优劣，从中归纳解决问题的一般策略.

参考文献：

[1]教育部考试中心.中国高考评价体系[M].北京:人民教育出版社，2019.

[2]任子朝.从能力立意到素养导向[J].中学数学教学参考，2018（5）：1.

[3]任子朝　赵轩.数学考试中的结构不良问题研究[J].数学通报，2020（2）：1-3.