2020年高考天津卷第20题解法探究

蔡海涛[1]　卢妮[2]　黄少莹[3]

摘要：本文以一道2020年高考题为例进行多解分析，探求多变量问题证明不等式的常用方法，总结归纳一般求解策略，并作变式练习巩固.

关键词：高考题　解法探究　多元变量

一、试题呈现

（2020年高考天津卷·20）已知函数 $f(x)=x^3+k\ln x(k\in \mathrm{R})$，$f^{'}\left(x\right)$ 为 $f\left(x\right)$ 的导函数.

（Ⅰ）当 $k=6$ 时，

（i）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（ii）求函数 $g(x)=f(x)-f^{'}(x)+\dfrac{9}{x}$ 的单调区间和极值；

（Ⅱ）当 $k\quad -3$ 时，求证：对任意的 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，有

$$\frac{f^{'}\left(x_1\right)+f^{'}\left(x_2\right)}{2}>\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}.$$

本题以初等函数为载体，考查求曲线的切线方程、研究函数的极值、导数的应用等基础知识，考查运算求解能力、推理论证能力与创新意识，考查函数与方程思想、化归与转化、分类与整合等思想，考查数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现综合性、应用性、创新性.

二、解法赏析

解法1：（Ⅰ）(i) $y=9x-8$.

(ii)函数 $g\left(x\right)$ 的单调递减区间为 $\left(0,1\right)$，单调递增区间为 $\left(1,+\infty\right)$；

$g\left(x\right)$ 的极小值为 $g\left(1\right)=1$，无极大值.（过程略）

（Ⅱ）**解法1：**由 $f(x)=x^3+k\ln x$，得 $f^{'}(x)=3x^2+\dfrac{k}{x}$.

对任意的 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，令 $\dfrac{x_1}{x_2}=t\quad(t>1)$，则

$$\left(x_1-x_2\right)\left(f^{'}\left(x_1\right)+f^{'}\left(x_2\right)\right)-2\left(f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right)$$

$$=\left(x_1-x_2\right)\left(3x_1^2+\frac{k}{x_1}+3x_2^2+\frac{k}{x_2}\right)-2\left(x_1^3-x_2^3+k\ln\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$=x_1^3-x_2^3-3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+k\left(\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}\right)-2k\ln\dfrac{x_1}{x_2}$

$=x_2^3\left(t^3-3t^2+3t-1\right)+k\left(t-\dfrac{1}{t}-2\ln t\right)$. ①

令 $h(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x,\quad x\in[1,+\infty)$. 当 $x>1$ 时，$h'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2>0$，

由此可得 $h\left(x\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 单调递增，所以当 $t>1$ 时，$h\left(t\right)>h\left(1\right)$，即 $t-\dfrac{1}{t}-2\ln t>0$.

因为 $x_2\geqslant 1$，$t^3-3t^2+3t-1=(t-1)^3>0$，$k\geqslant -3$，

所以 $x_2^3\left(t^3-3t^2+3t-1\right)+k\left(t-\dfrac{1}{t}-2\ln t\right)\geqslant\left(t^3-3t^2+3t-1\right)-3\left(t-\dfrac{1}{t}-2\ln t\right)$

$=t^3-3t^2+6\ln t+\dfrac{3}{t}-1$. ②

由(Ⅰ)(ii)可知，当 $t>1$ 时，$g\left(t\right)>g\left(1\right)$，即 $t^3-3t^2+6\ln t+\dfrac{3}{t}>1$，

故 $t^3-3t^2+6\ln t+\dfrac{3}{t}-1>0$ ③

由①②③可得 $\left(x_1-x_2\right)\left(f'\left(x_1\right)+f'\left(x_2\right)\right)-2\left(f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right)>0$.

所以，当 $k\geqslant -3$ 时，任意的 $x_1,x_2\in\left[1,+\infty\right)$，且 $x_1>x_2$，有

$\dfrac{f'\left(x_1\right)+f'\left(x_2\right)}{2}>\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}$.

点评：本题第（Ⅱ）问是多元变量证明不等式问题，基本方法是消元构造新函数. 把要证的式子转化为 $x_1^3-x_2^3-3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+k\left(\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}\right)-2k\ln\dfrac{x_1}{x_2}$ 后，发现有多项含有 $\dfrac{x_1}{x_2}$，故对式子 $x_1^3-x_2^3-3x_1^2x_2+3x_1x_2^2$ 提取 x_2^3，进而令 $\dfrac{x_1}{x_2}=t\quad(t>1)$，从而转化为证明 $x_2^3\left(t^3-3t^2+3t-1\right)+k\left(t-\dfrac{1}{t}-2\ln t\right)>0$，再利用 $x_2\geqslant 1$ 及 $k\geqslant -3$ 放缩后，把问题转化为证明 $t^3-3t^2+6\ln t+\dfrac{3}{t}-1>0$，从而转化为单变量的不等式证明，本题难点突破，接下来问题不难解决了. 含双变量 x_1，x_2 的问题，常常构建 $x_1\cdot x_2$ 或 $\dfrac{x_1}{x_2}$ 的关系，再利用换元，把二元问题转化为一元问题.

解法 2：要证原不等式成立，只须证 $\dfrac{3x_1^{\ 2}+\dfrac{k}{x_1}+3x_2^{\ 2}+\dfrac{k}{x_2}}{2}>\dfrac{x_1^{\ 3}-x_2^{\ 3}+k\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$

即证 $\dfrac{3}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)+\dfrac{k}{2}\cdot\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}>x_1^2+x_1x_2+x_2^2+k\cdot\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

即证 $\left(x_1-x_2\right)^3+k\cdot\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}>2k\cdot\ln\dfrac{x_1}{x_2}$.

令 $t=x_1>x_2\geqslant 1$， $g\left(t\right)=\left(t-x_2\right)^3+k\cdot\left(\dfrac{1}{x_2}t-x_2\cdot\dfrac{1}{t}\right)-2k\cdot\ln t+2k\ln x_2$，则

$g^{'}\left(t\right)=3\left(t-x_2\right)^2+k\cdot\left(\dfrac{1}{x_2}+x_2\cdot\dfrac{1}{t^2}\right)-\dfrac{2k}{t}=3\left(t-x_2\right)^2+k\cdot\dfrac{\left(t-x_2\right)^2}{x_2t^2}=\dfrac{\left(t-x_2\right)^2\left(3t^2x_2+k\right)}{x_2t^2}>0$

所以 $g\left(t\right)$ 在 $\left(x_2,+\infty\right)$ 单增，则 $g\left(t\right)>g\left(x_2\right)=0$.

点评：解法 2 把要证不等式转化为证明 $\left(x_1-x_2\right)^3+k\cdot\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}>2k\cdot\ln\dfrac{x_1}{x_2}$，该式含有三个变量，令 $t=x_1$，进而构造以 t 为主元的函数 $g\left(t\right)$，注意到 $g\left(x_2\right)=0$，故只须证明 $g\left(t\right)>g\left(x_2\right)$ 即可，从而难点得以突破.解法 2 的关键是确定一个变量为主元，其它变量为常量，这是处理多变量问题的常用策略.

解法 3：同解法 2，要证原不等式成立，只须证 $\left(x_1-x_2\right)^3+k\cdot\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}>2k\cdot\ln\dfrac{x_1}{x_2}$.

为了构造 $\dfrac{x_1}{x_2}$ 为变量函数，考虑对不等式进行放缩，即 $x_1-x_2\geqslant\dfrac{x_1-x_2}{x_2}=\dfrac{x_1}{x_2}-1$，下证：

$\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1\right)^3+k\left(\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}\right)-2k\cdot\ln\dfrac{x_1}{x_2}>0$

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}>1$， $h\left(t\right)=\left(t-1\right)^3+k(t-\dfrac{1}{t})-2k\cdot\ln t$，

则 $h^{'}\left(t\right)=3\left(t-1\right)^2+k(1+\dfrac{1}{t^2})-k\cdot\dfrac{2}{t}=\dfrac{\left(t-1\right)^2\left(3t^2+k\right)}{t^2}>0$，

所以 $h\left(t\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 单增，则 $h\left(t\right)>h\left(1\right)=0$.

点评：解法 3 同解法 2 先证不等式 $\left(x_1-x_2\right)^3+k\cdot\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}>2k\cdot\ln\dfrac{x_1}{x_2}$，为了构造以 $\dfrac{x_1}{x_2}$ 为变量的函数，故将式子 x_1-x_2 放缩为 $\dfrac{x_1}{x_2}-1$，从而要证不等式的必要条件为

$\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)^3+k\left(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\right)-2k\cdot\ln\frac{x_1}{x_2}>0$，实现了要证不等式的同构，达到对多元变量处理难点的突破. 有时证明不等式可以证明其必要条件，使得问题简化.

三、变式练习

练习 1：（2015 年高考全国卷Ⅱ·理 21）设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{mx}+x^2-mx$.

(1) 证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

(2) 若对于任意 x_1， $x_2\in[-1,1]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant \mathrm{e}-1$，求 m 的取值范围.

练习 2：（2016 年高考全国卷Ⅰ·理 21）已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 设 x_1， x_2 是 $f\left(x\right)$ 的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$.

练习 3：已知函数 $f(x)=a\ln x-x-\frac{a+1}{x}$ $(a\in\mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 当 $e<a<2\sqrt{e}$ 时，关于 x 的方程 $f(ax)=-\frac{a+1}{ax}$ 有两个不同的实数解 x_1,x_2，求证：$x_1+x_2<4x_1x_2$.

练习 1 答案：(1) 略；(2) m 的取值范围是 $[-1,1]$.

练习 2 答案：(1) a 的取值范围为 $(0,+\infty)$. ；(2) 略.

练习 3 答案：(1) 函数 $f(x)$ 单调递减区间是 $(0,+\infty)$，无递增区间；(2) 略.

四、解后反思

多元变量问题在近年高考试题中频频出现，这类问题因变量多,结构复杂，学生不易掌握. 求解多元变量问题方法很多，本文以 2020 年天津高考题为例举的三种解法是解决多变量不等式问题的常用方法，这些解法共同点是我们在解题时，须从不同的角度、不同方向考虑整合变量或确定主元或换元变形[1]，目的均是消去变量. 当然，除了以上的方法外，还有许多其它的方法有待我们去总结，需要同学们在解题过程中充分运用数学思想方法，领会数学建模、逻辑推理、数学运算、直观想象等数学核心素养. 只有这样，我们才能达到“通一题、会一类”的效果.

参考文献：

[1]蔡海涛. 多元变量探究最值问题[J]. 中学数学教学参考（下旬）. 2018，(1-2)104-105